Indeterminacy sets of rational maps and dimension of the invariant sets (Integrated Research on Complex Dynamics)

AUTHOR(S):

篠原, 知子

CITATION:

篠原, 知子. Indeterminacy sets of rational maps and dimension of the invariant sets (Integrated Research on Complex Dynamics). 数理解析研究所講究録 2012, 1807: 1-8

ISSUE DATE:

2012-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/194438

数理解析研究所講究録
第 1807 巻 2012 年 1-8

Indeterminacy sets of rational maps and dimension of the invariant sets

Tomoko Shinohara [1]
Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology
E-mail address: sinohara@s.metro-cit.ac.jp

篠原 知子
東京都立産業技術高等専門学校

1. Introduction.

この報告では，複素 n 次元射影空間 $\mathbf{P}^n$ 上の有理写像 F の固定的不定点 p における局所的な力学系構造の考察を行う．特に blow up を使って，p において F により不変な集合 V を構成する．

第 2 章では，記号と用語を準備し，これまでに得られた複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の結果を紹介する．第 3 章では，2 次元の結果を $\mathbf{P}^n$ のある開集合上の有理型写像 F で不定点集合 I の次元が正の場合に拡張する．特に，ある条件を満たす有理写像 F に対し，I を含み，F により不変な曲面 V が存在することを示すとともに，不定点集合の次元と，不変集合の次元の間の関係の予想を述べる．

2. 2 次元の場合のまとめ

この章では記号と用語を用意し，これまでに得られた 2 次元の場合の結果を紹介する．詳しくは [3] を参照して欲しい．

$f_i(x_1,x_2,x_3)(i=0,1,2)$ を次数 d の斉次多項式，$F:[x_1:x_2:x_3]\mapsto[f_0:f_1:f_2]$ を $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像，$G:(x_1,x_2,x_3)\mapsto(f_0,f_1,f_2)$ を $\mathbf{C}^3$ 上の多項式写像とする．このとき， $\tilde{\pi}\circ G=F\circ\tilde{\pi}$ が $\mathbf{C}^3$ からある解析的集合を除いたところで成立する．ここで，$\tilde{\pi}:\mathbf{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbf{P}^2$ は**標準的射影**とする．$G(\tilde{p})=(0,0,0)$ がある点 $\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)$ に対して成り立つとき，点 $p\in\mathbf{P}^2$ は F の**不定点**であるという．一般に，p が不定点であるとき，$\bigcap_{N_p}\overline{F(N_p\setminus\{p\})}$ は一点にならないことに注意する．ただし N_p は p の任意の開集合とする．不定点 p が $p\in\bigcap_{N_p}\overline{F(N_p\setminus\{p\})}$ を満たすとき**固定的不定点**とよぶことにする．固定的不定点は連続写像の不動点の定義を拡張したものである．特に，p の任意の近傍 N_p に対し，$F(N_p\setminus\{p\})\cap N_p\neq\emptyset$ が成り立つことから，固定的不定点においては，不動点と同様に局所的な力学系構造の存在が期待できる．[5],[6] では固定的不定点 p にある条件を与えるとき，点 p を通る 1 次元複素多様体 W_{j} で構成される，

[1] This research is supported by MEXT Grant-in-Aid for Young Scientists(B) No. 22740113.

点 p の局所安定多様体の族 $\{W_{\mathrm{j}}\}_{\mathrm{j}\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}}$ が存在することを示した．この集合族はカントールブーケと呼ばれる．2 変数正則写像の場合，鞍型不動点には 1 次元複素多様体である局所安定多様体と局所不安定多様体が 1 つずつ存在する．一方，カントールブーケは，有理写像の不定点に，非加算無限個の局所安定多様体が存在するなど，より複雑な力学系構造を持っている．

この章では $\mathbf{P}^2$ の有理写像 $F : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ は点 $p = [0:0:1]$ を不定点に持つとする．$\mathbf{P}^2$ の部分集合 $\{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^2 \mid x_3 \neq 0\}$ を

$$[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (x_1/x_3, x_2/x_3)$$

により，今後局所座標近傍 $\mathbf{C}^2$ と同一視する．この座標で点 p は原点 $p = (0,0)$ となることに注意する．$\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1$ の部分集合 X_1 を次の様に定義する．

$$X_1 := \Big\{(x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1 \mid x_1 l_2 - x_2 l_1 = 0\Big\}.$$

このとき，X_1 は次の 2 つの座標近傍系 $\{(U_1^j, \mu^j)\}_{j=1,2}$ により $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1$ の部分多様体となることが定義より直ちにわかる．

$$U_1^1 := \Big\{(x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \in X_1 \;\Big|\; l_1 \neq 0,\;\; x_2 = \frac{l_2}{l_1} x_1\Big\},$$

$$\mu_1^1 : U_1^1 \to \mathbf{C}^2, (x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \mapsto \Big(x_1, l_2/l_1\Big),$$

$$U_1^2 := \Big\{(x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \in X_1 \;\Big|\; l_2 \neq 0,\;\; x_1 = \frac{l_1}{l_2} x_2\Big\},$$

$$\mu_1^2 : U_1^2 \to \mathbf{C}^2, (x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \mapsto \Big(l_1/l_2, x_2\Big).$$

Definition 1. ([2]). 第一成分への射影 $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{C}^2$ の X_1 への制限を $\pi_1 : X_1 \to \mathbf{C}^2$ とする．この写像 π_1 を，$p = (0,0)$ を中心とする $\mathbf{C}^2$ の **blow up** と定義する．また，X_1 の部分集合 $E_1 := \pi_1^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbf{P}^1$ を π_1 の**除外曲線**と呼ぶ．

ここで，$\pi_1 : X_1 \setminus E_1 \to \mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$ は双正則写像であることに注意しておく．

固定的不定点における局所的な力学系構造の研究は，これまで [3], [4] などで行ってきた．ここでは，その結果を簡単に紹介する．

まず，合成写像 $\tilde{F}_1 := F \circ \pi_1 : X_1 \to \mathbf{P}^2$ を定義し，$\tilde{F}_1$ が次の条件を満たすと仮定する．

$$(A.0)\begin{cases} \tilde{F}_1 \text{ は } E_1 \text{ の各点のある近傍上正則であり，} \tilde{F}_1^{-1}(p) \cap E_1 = \{p_1\} \text{ である．} \\ \text{点 } p_1 \text{ のある開近傍 } N_1 \text{ が存在し，} \tilde{F}_1 \text{ は } N_1 \text{ 上双正則写像となる．} \end{cases}$$

条件 $(A.0)$ を仮定すると，点 p は F の固定的不定点になることに注意する．

$N(E_1)$ を除外曲線 E_1 のある開近傍，$F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1 : N(E_1) \to X_1$, $\pi_2 : X_2 \to X_1$ を点 p_1 を中心とする X_1 の blow up，E_2 を X_2 の除外曲線，$\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2 : X_2 \to X_1$ とする．F が条件 $(A.0)$ を満たすとき次の主張が成り立つ．

$(A.1)$
(1) F_1 は $N(E_1)$ 上の有理型写像であり，点 p_1 は F_1 の不定点である．
(2) $\tilde{F}_2|_{E_2} : E_2 \to E_1$ は全単射であり，$p_2 := \tilde{F}_2^{-1}(p_1) \in E_2$ とおくことができる．更にこのとき，点 p_2 のある開近傍 N_2が存在し，$\tilde{F}_2$ は N_2 上双正則写像となる．

この過程を帰納的に繰り返して，blow up $\pi_{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ の列を定義することができ，任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対し，点列 $\{p_n\}$ で $p_n \in X_n$ を満たすものを得ることができる．

議論を進めるために，次の条件 (B) を更に仮定する．

$$(B)\ \text{任意の}\ n \in \mathbf{N}\ \text{に対し}\ p_n \in U_n^1,$$

但し U_n^1 は X_1 の座標近傍 U_1^1 と同様に定義した，X_n の座標近傍とする．U_n^1 の座標を用いて，$p_n = (0, \alpha_n)$ とおく．複素数列 $\{\alpha_n\}$ を用いて，形式的べき級数

$$x_2 = \phi(x_1) := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \cdots,$$

を定義する．この形式的べき級数 ϕ の収束半径 r が正のとき，ϕ のグラフを用いて

$$V := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2 \mid x_2 = \phi(x_1),\ |x_1| < r\right\}$$

を定義する．このとき，次の結果を得る．

Theorem 3. ([3]). 点 p の十分小さい開近傍 N_p が存在し，次が成り立つ．

$$p \in \overline{F(V \setminus \{p\})} \cap N_p \subset V.$$

Remark. V は F の条件により，点 p の局所安定多様体や不安定多様体，中心多様体などとなる．

3. n 次元の場合. n を 3 以上の自然数，k を自然数，$p := (0, \cdots, 0) \in \mathbf{C}^n$, 点 p のある開近傍を U,

$$I := \{(x_1, \cdots, x_n) \in U \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

とおく．このとき，$\dim I = k$ である．これより先，F は $F : U \to \mathbf{P}^n$ の有理型写像で I を不定点集合に持つとする．2 次元の場合と同様に，$U \times \mathbf{P}^{n-k-1}$ の部分集合 X_1 を

$$X_1 := \Big\{(x_1, \cdots, x_n) \times [l_{k+1} : \cdots : l_n] \in U \times \mathbf{P}^{n-k-1} \mid x_j l_i - x_i l_j = 0,\ k+1 \le i, j \le n\Big\}$$

とおく．第一成分への射影 $\pi_1 : U \times \mathbf{P}^{n-k-1} \to U$ の X_1 への制限 $\pi_1 : X_1 \to U$ を I に沿った U の **blow up** と定義する．$E_1 := \pi_1^{-1}(I)$ とおき，E_1 を π_1 の**除外因子**と呼ぶ．X_1 は $n-k-1$ 個の開集合による座標近傍系 $\{(U_1^j, \mu_1^j)\}_{j=k+1,\cdots,n}$ により $U \times \mathbf{P}^{n-k-1}$ の部分多様体となることがわかる．ここでは，$j = k+1$ の定義を与える．

$$U_1^{k+1} := \Big\{(x_1, \cdots, x_n) \times [l_{k+1} : \cdots : l_n] \in X_1 \;\Big|\; l_{k+1} \ne 0\Big\}$$

$$= \Big\{x_j = \frac{l_j}{l_{k+1}} x_{k+1},\ j = k+2, \cdots n\Big\},$$

$$\mu_1^{k+1} : U_1^{k+1} \to \mathbf{C}^n,\ \ (x_1, \cdots, x_n) \times [l_{k+1} : \cdots : l_n] \mapsto \Big(x_1, \cdots, x_{k+1}, \frac{l_{k+2}}{l_{k+1}}, \cdots, \frac{l_n}{l_{k+1}}\Big).$$

この座標系を用いると π_1 は U_1^{k+1} 上，次の様に表される．

$$\pi_1|_{U_1^{k+1}} : U_1^{k+1} \to U,\ \ (z_1, \cdots, z_n) \mapsto (z_1, \cdots, z_{k+1}, z_{k+2}z_{k+1}, \cdots, z_n z_{k+1})$$

π_1 について次の性質が成り立つ．

Proposition.
(1) $\pi_1 : X_1 \setminus E_1 \to U \setminus I$ は双正則写像.
(2) $E_1 = \{(x_1, \cdots x_k, 0, \cdots, 0) \times [l_{k+1} : \cdots : l_n] \in X_1\} \cong I_1 \times \mathbf{P}^{n-k-1}$, $\dim E_1 = n-1$.
(3) $E_1 \cap U_1^{k+1} = \{(z_1, \cdots, z_n) \in U_1^{k+1} \mid z_{k+1} = 0\}$.

また有理型写像 F と不定点集合 I に対して，次の定理が成り立つことが知られている．

Theorem([1]). 任意の有理型写像 F と不定点集合 I に対し，ある自然数 m と blow up の列 $\pi_j : X_{j+1} \to X_j$ $(1 \le j \le m)$ が存在し，$\tilde{F} := F \circ \pi_1 \circ \cdots \pi_m : X_{m+1} \to \mathbf{P}^n$ は regular 写像となる．

議論を簡単にするために，F は 1 回の blow up で不定性が解消するとする．2 次元の場合の条件 $(A.0)$ を一般化して，ここで F に次の仮定 $(B.0)$ をおく

$$(B.0)\begin{cases} (1)\ \tilde{F}_1 := F\circ\pi_1 : X_1 \to \mathbf{P}^n \text{ は } E_1 \text{ の各点のある近傍上，正則である.}\\ (2)\ \tilde{F}_1(E_1) \supset I.\\ (3)\ I_1 := \tilde{F}_1^{-1}(I) \text{ とおくとき, } I_1 \text{ は } k \text{ 次元部分多様体である.}\\ (4)\ \text{ある点 } p_1 \in I_1 \text{ が存在し } \tilde{F}_1(p_1) = p \text{ と } \pi_1(p_1) = p \text{ が成立する.}\\ \quad \text{また } \tilde{F}_1 \text{ は } p_1 \text{ のある近傍上で双正則写像である.}\end{cases}$$

Remark. $(B.0)$ の (4) より

$$p \in \bigcap_{N_p} \overline{F(N_p \setminus I)},\ \text{但し, } N_p \text{ は } p \text{ の任意の開近傍,}$$

が成り立つので点 p は固定的不定点であることに注意する．$(B.0)$ の (3), (4) は不定点集合 I の次元が正であることにより新たに必要になった条件である．

V が点 p において局所的に不変な集合であるとは，p のある近傍 N_p に対し，次の条件 $(*1)$ が成り立つこととする．

$$(*1)\quad p \in F(V) \cap N_p \subset V$$

除外因子 E_1 の次元が $n-1$ であることと $\dim I = k$ であることより次の予想を得た．

Conjecture. 適切な条件を F に与えると，点 p において局所的に不変な $k+1$ 次元の複素多様体 V が存在する．特に，点 p のある近傍 N_p に対し，$p \in I \cap N_p \subset V$ が成り立つ．

これ以降は，この予想が成立する写像 F の例を 2 つ紹介する．

Example 1. 次の様な有理型写像 F を考える．

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big(x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{x_3} - \psi(x_1, x_2)\Big).$$

但し，$\psi(x_1, x_2)$ は $(x_1, x_2) = (0, 0)$ の近傍での正則関数であり，$(0, 0)$ でのべき級数展開が

$$\psi(x_1, x_2) := \sum_{i,j\geq 0} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j$$

であるとする．F は 2 次元の不定点集合 $I = \{(x_1, x_2, 0, 0)\}$ を持つ．また $(B.0)$ の条件を満たしており，$p_1 = (0, 0, 0, 0) \in U_1^3$ である．さらに次が成立する．

$$\tilde{F}|_{U_1^3}(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4 - \psi(z_1, z_2)),$$

$$I_1 \cap U_1^3 = \Big\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_1^3 \mid z_3 = 0,\ z_4 = \psi(z_1, z_2)\Big\}.$$

このとき I_1 に沿った U_1^3 の blow up $\pi_2 : X_2 \to U_1^3$ を定義し，2つの合成写像 $F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2$ を定義する．この $\tilde{F}_2$ に対し，$\tilde{F}_1$ のときと同様の条件 $(B.1)$ が成り立つことを示すことができる．この手順を繰り返すことで帰納的に，任意の自然数 $n \geq 2$ に対し， $\tilde{F}_n$, I_n を定義することができ，次が成り立つ．

$$\tilde{F}_n = id., \quad F_n = F_1, \quad I_n = I_1 = \left\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_1^3 \;\middle|\; z_2 = 0, \quad z_4 = \psi(z_1, z_2)\right\}.$$

一方，この写像 F に対しては，$k = 2$ であるので Conjecture より 3 次元の複素多様体が存在することが期待される．そこで 3 変数の形式的べき級数

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i,j,l \geq 0} a_{ijl} x_1^i x_2^j x_3^l$$

を用いて次の集合 V を定義する．

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \;\middle|\; x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)\right\}.$$

点 p のある開近傍 N_p に対して，$p \in I \cap N_p \subset V$ が成り立つとすると，任意の自然数 $i, j \geq 0$ に対して

$$a_{ij0} = 0$$

が成り立つ．更に V が $(*1)$ の条件を満たすとする．このとき $(B.0)$ の条件より，点 p_1 のある開近傍 N_{p_1} が存在し

$$p_1 \in N_{p_1} \cap I_1 \subset \pi_1^{-1}(V) \cap U_1^3 \cap E_1$$

が成り立たなくてはならない．これから任意の $i, j \geq 1$ に対して

$$a_{ij1} = \alpha_{ij}$$

を得る．この手順を帰納的に繰り返すことで，任意の自然数 $i, j, l \geq 1$ に対し

$$a_{ijl} = \alpha_{ij}$$

が成り立つことがわかる．以上より Φ は次の形であることがわかる．

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j,l \geq 1} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j x_3^l.$$

特に Φ の収束域が存在することから，$(*1)$ を満たすような点 p で局所的に不変な 3 次元の集合 V が存在することがわかる．

Example 2. 次の様な有理型写像 F を考える．

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(x_1,x_2,\frac{x_3}{x_2}-\psi_3(x_1),\frac{x_4}{x_2}-\psi_4(x_1)\right).$$

但し，$\psi_3(x_1),\psi_4(x_1)$ は $x_1=0$ の近傍での正則関数であり，べき級数展開は

$$\psi_3(x_1):=\sum_{i\geq 0}\alpha_i x_1^i,\quad \psi_4(x_1):=\sum_{i\geq 0}\beta_i x_1^i$$

であるとする．この写像 F は 1 次元の不定点集合 $I=\{(x_1,0,0,0)\}$ を持つ．また $(B.0)$ の条件を満たしている．

$$\tilde{F}|_{U_1^2}(z_1,z_2,z_3,z_4)=(z_1,z_2,z_3-\psi_3(z_1),z_4-\psi_4(z_1)),$$

$$I_1\cap U_1^2=\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in U_1^2 \mid z_2=0,\ z_3=\psi_3(z_1),\ z_4=\psi_4(z_1)\right\}.$$

このとき I_1 に沿った U_1^2 の blow up $\pi_2:X_2\to U_1^2$ を定義し，2 つの合成写像 $F_1:=\pi_1^{-1}\circ\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2:=F_1\circ\pi_2$ を定義する．この $\tilde{F}_2$ に対し，$\tilde{F}_1$ のときと同様の条件 $(B.1)$ が成り立つことを示すことができる．更にこの手順を繰り返すことで帰納的に $\tilde{F}_n$, I_n を定義することができる．特に任意の $n\geq 2$ に対し

$$\tilde{F}_n=id.,\ ,F_n=F_1,\ I_n=I_1=\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in U_1^2 \;\middle|\; z_2=0,\ z_3=\psi_3(z_1),\ z_4=\psi_4(z_1)\right\}.$$

が成り立つ．一方，2 つの 2 変数の形式的べき級数

$$\Phi_3(x_1,x_2):=\sum_{i,j\geq 0}a_{ij}x_1^i x_2^j,\quad \Phi_4(x_1,x_2):=\sum_{ij}b_{ij}x_1^i x_2^j$$

を用いて次の集合 V を定義する．

$$V:=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in U \;\middle|\; x_3=\Phi_3(x_1,x_2),\ x_4=\Phi_4(x_1,x_2)\right\}.$$

点 p のある開近傍 N_p に対して，$p\in I\cap N_p\subset V$ が成り立つとすると，任意の自然数 $i\geq 0$ に対して

$$a_{i0}=0,\quad b_{i0}=0$$

が成り立つ．更に V が $(*1)$ の条件を満たすとする．このとき，点 p_1 のある近傍 N_{p_1} が存在し

$$p_1\in N_{p_1}\cap I_1\subset \pi_1^{-1}(V)\cap U_1^2\cap E_1$$

が成り立たなくてはならない．これから任意の $i \geq 1$ に対して

$$a_{i1} = \alpha_i, \quad b_{i1} = \beta_i$$

が成り立つ．この手順を帰納的に繰り返すことで，任意の自然数 $i, j \geq 1$ に対し

$$a_{ij} = \alpha_i, \ b_{ij} = \beta_i$$

を得る．以上より Φ_3, Φ_4 は次の形であることがわかる．

$$\Phi_3(x_1, x_2) = \sum_{i,j \geq 1} \alpha_i x_1^i x_2^j, \quad \Phi_4(x_1, x_2) = \sum_{i,j \geq 1} \beta_i x_1^i x_2^j$$

特に Φ_3, Φ_4 の収束域が存在するので, (*1) を満たすような点 p で局所的に不変な 2 次元の集合 V が存在することがわかる．

今後は，これらの例を元に，Conjecture が成立する十分条件を定式化していきたい．

References

[1] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1992).

[2] I. R. Shafarevic, *Basic Algebraic Geometry Vols I and II*, Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[3] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point*, Kyoto J. Math. 50 (2010), no.1, 205–224.

[4] T. Shinohara, *Maximal local invariant set in a neighborhood of a fixed indeterminate point*, submitting.

[5] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.

[6] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's method*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (2003), 897–908.